# Matemática

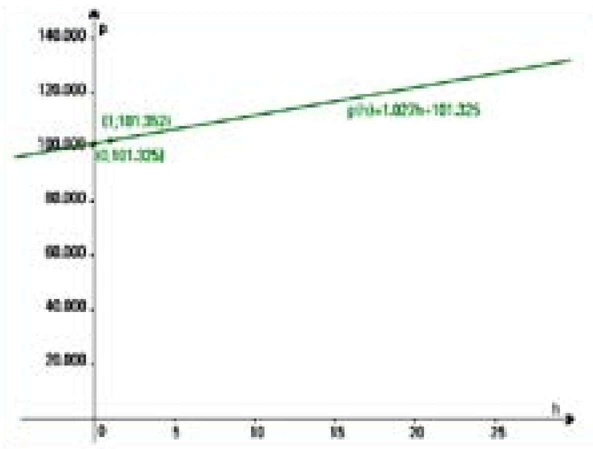
## Funciones

SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

## Situacion Problemática

Los buzos aficionados pueden bucear hasta una profundidad aproximada de 40 metros con un tubo de aire comprimido común. Un buzo que se sumerge hasta una profundidad h en el océano experimenta una presión


p, que se representa por: $p = p_0 + \rho . h$ , donde $p_0 = 101{,}325 \ \frac{N}{m^3}$ es la presión atmosférica al nivel del mar y $\rho \approx 1{,}027 \ \frac{N}{m^3}$ es la constante que representa el peso específico del agua de mar. Esta relación entre la presión y la altura se modeliza con una función lineal: $p = 1{,}027 . h + 101{,}325$



Es importante notar que el dominio, en este caso, puede tomar valores negativos, que corresponderían a puntos por encima de la superficie del océano. De la fórmula obtenida, se concluye que si un buzo se encuentra a 10 metros de profundidad, deberá soportar una presión que resulta de calcular

$$p(10) = 1027 \cdot 10 + 101325 = 111595 \ \frac{N}{m^2}.$$

## ACTIVIDAD

### FUNCION LINEAL

1) Una empresa de taxi de la ciudad, cobra la bajada de bandera (costo fijo) a \$ 10,10 y luego \$1,10 por cada kilómetro recorrido. Completar la tabla de distancias y graficar en un sistema de ejes cartesianos detallando las unidades de los ejes y la magnitud que representa.

| Distancia (km.) | Precio final (\$) |
|---|---|
| 0 | |
| 5 | |
| 10 | |
| 20 | |
| 50 | |

Escribir la función que modeliza la situación. Identificar el dominio e imagen.

2) Graficar en un sistema de ejes cartesianos las siguientes funciones mediante la tabla de valores sugerida.

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -x - 2$

| x | y | (x,y) |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 1 | | |
| 2 | | |
| –1 | | |
| –2 | | |

## FUNCIÓN LINEAL

*En la serie de actividades anteriores han observado que para realizar un gráfico de una función es conveniente construir una tabla de valores, en donde asignando valores a la variable* ***x*** *(independiente) se calculan los correspondientes valores de* ***y*** *(dependiente de los que toma* ***x****), obteniéndose los puntos que representarán a la función como pares ordenados* ***(x;y)****. En esta tabla de valores se asignan los valores a* ***x*** *y se calculan los valores de* ***y****, según el formato que tenga la relación.*

*Si los gráficos anteriores quedaron representados por rectas, entonces vamos en buen camino.*

*Hay muchos problemas que se pueden modelizar mediante las funciones de este tipo, llamadas lineales, justamente por ser una recta su gráfica.*

*Podemos identificar dos elementos en esta recta que nos permite graficar sin utilizar la tabla de valores y simplificar al momento de graficar una función lineal.*

*Como sabemos de la geometría elemental, necesitamos al menos dos puntos para dibujar una recta.*

*Analicemos la forma general de toda función lineal:*

*$f(x) = y = m.x + b$ , donde "m" y "b" son números reales.*

*Veamos la interpretación gráfica de estos números.*

*Para obtener la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas, el eje "y", la variable independiente "x" vale cero. Es decir $f(0) = y = m.0 + b = b$*

*Por lo tanto, el número "b" indica la ordenada al origen, es decir, la intersección de la gráfica con el eje de ordenadas.*

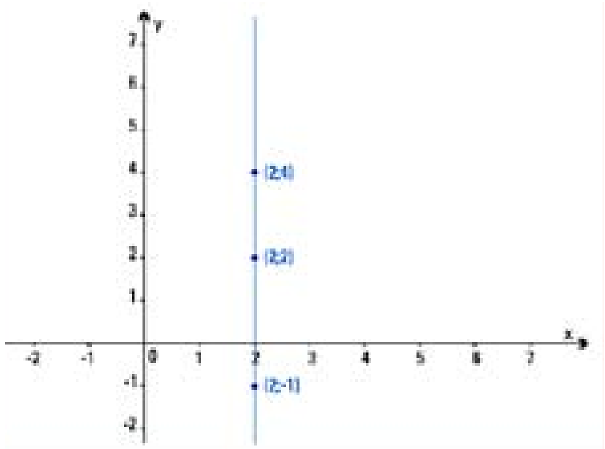
*Con el dato de la ordenada al origen, entonces, tenemos un punto de la recta. Para graficarla necesitamos otro más. Para encontrarlo, utilizamos el otro dato de la función lineal, el número real "m", que representa la <u>inclinación o pendiente de la recta</u>, la cual está relacionada con el ángulo que tiene la recta respecto a la horizontal. Si dicho ángulo es α, entonces:*

$$\text{Pendiente} = m = \text{Pendiente} = m = \frac{\text{unidades verticales}}{\text{unidades horizontales}} = \operatorname{tg} \alpha$$

## EJEMPLOS RESUELTOS

*<u>EJEMPLO 1</u>*

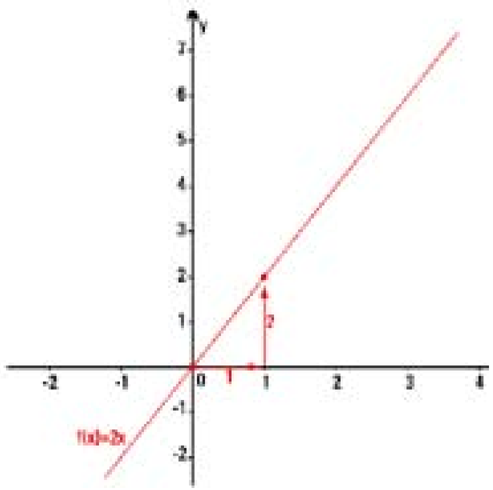
*¿Toda recta que se puede graficar en un sistema de ejes cartesianos representa una función lineal?*



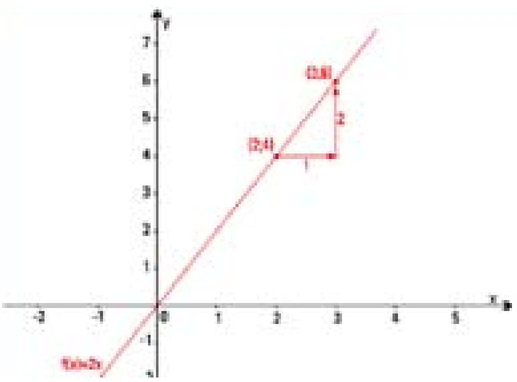

*La recta $x = 2$, representada en la figura, no representa una función ya que no cumple con los requisitos debido a que para un mismo valor le corresponden infinitos.*

## *EJEMPLO 2*

*Graficar la función f(x)=2.x, utilizando la pendiente y la ordenada al origen.*




*En este caso la ordenada al origen es el punto (0,0). Por tanto, desde ese punto, para encontrar otro punto de la recta, siendo la pendiente de valor 2, debemos movernos desde el origen, 2 unidades verticales (hacia arriba por ser positivo) y una unidad hacia la derecha (horizontal).*

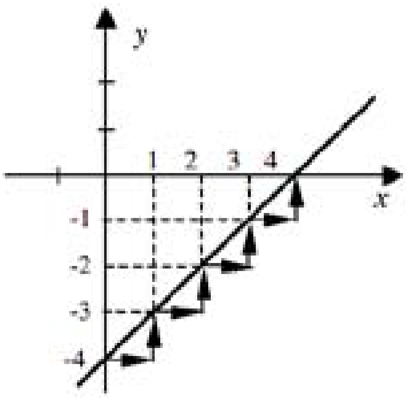


*Observar que entre cualquier par de puntos de la recta, se verifica la relación que indica la pendiente.*

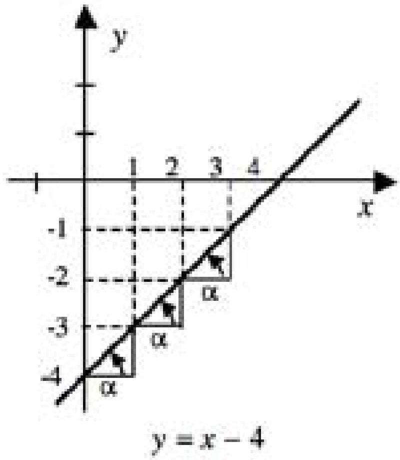
## *EJEMPLO 3*

*y = x - 4*

*Desde la ordenada al origen, en este caso -4, siendo la pendiente de valor 1, muevo una unidad vertical, hacia arriba, y una unidad horizontal hacia la derecha para encontrar otro punto de la recta.*

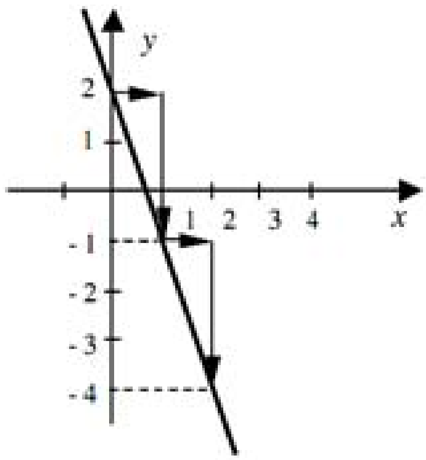



*Cuando la abscisa (unidad horizontal) aumenta una unidad, la ordenada (ordenada vertical) también aumenta una unidad.*



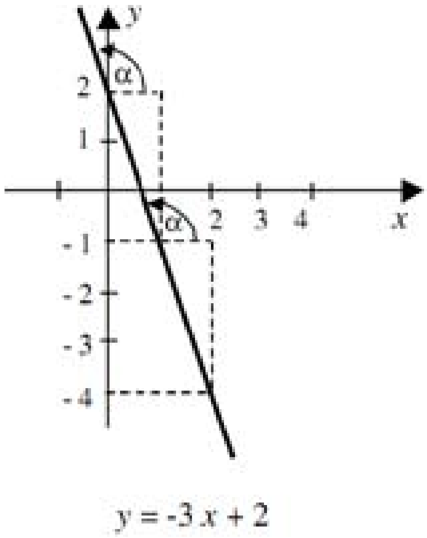

*Como la pendiente* $m = 1$, *entonces* $tg\ \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$

*EJEMPLO 4*




$y = -3.x + 2$

*Cuando la abscisa aumenta* 3 *unidades, la ordenada disminuye una unidad.*




*Como la pendiente* $m = \frac{-3}{1}$ ,

*entonces*
*tg* $\alpha = -3 \Rightarrow \alpha = 108^\circ\, 26'5,\, 82''$

## EJEMPLO 5

*Determinar la ecuación de la función lineal que pasa por el punto* $(-2;4)$ *y cuya pendiente es* $m = -\frac{3}{2}$ . *Graficar.*

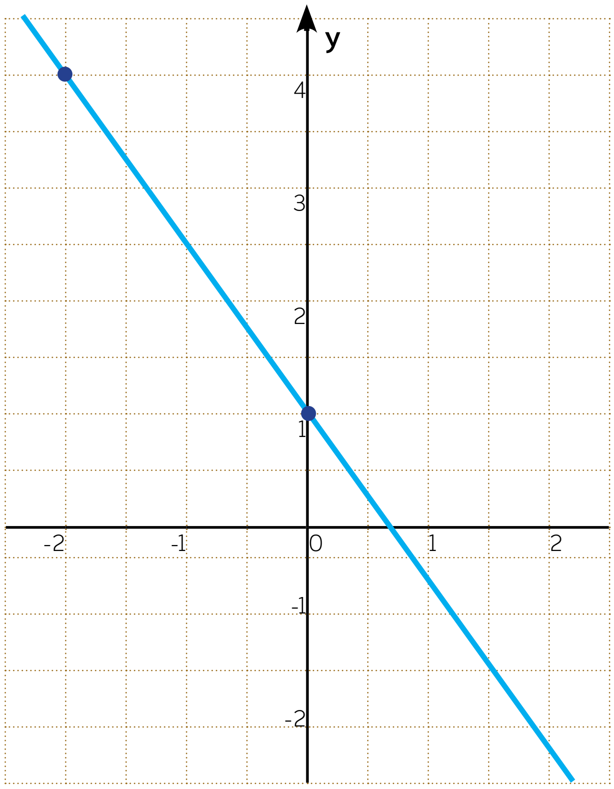
*Primero graficamos con los datos dados. Es decir, marcamos el punto y desde ahí, utilizamos el valor de la pendiente ya que,*

$$m = -\frac{3}{2}$$

*Desde el punto dado, muevo 3 unidades verticales hacia abajo porque es negativo.*

*Luego, muevo 2 unidades verticales hacia la derecha. Marco ahí mismo otro punto y obtengo la recta.*

*Entonces, el gráfico quedaría como el que se muestra.*




*Ahora tengo dos puntos de la recta, puedo escribir la función lineal o la recta, sabiendo que cada punto satisface la ecuación*

$$f(x) = y = m.x + b$$

*Entonces, los puntos* $(-2\ ,\ 4)$ *y* $(\ 0\ ,\ 1\ )$ *satisfacen la ecuación general de la función lineal, por lo que:*

$$4 = -\frac{3}{2}(-2) + b \qquad \Rightarrow b = 1 \qquad \Rightarrow y = -\frac{3}{2}.x + 1$$

*es la ecuación pedida de la función.*

*Si lo hacemos con el otro punto, sería:* $1 = -\frac{3}{2}.0 + b \Rightarrow b = 1$, *lo que verifica lo hallado antes.*

## *EJEMPLO 6*

*El sistema ferroviario argentino tuvo sus comienzos en el año* 1857, *cuando un conjunto de empresarios construyeron la primera línea ferroviaria en Argentina;*

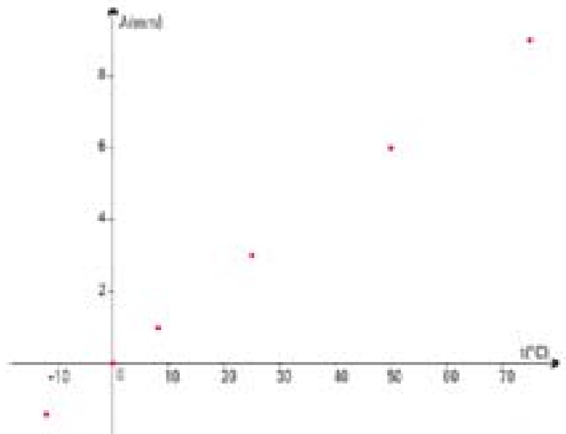
*ésta unía el centro de la Ciudad de Buenos Aires con los suburbios, a lo largo de* 10 *km. En 1870 ya había* 722 *km de vías.*

*Si se observan las vías del ferrocarril, se puede ver que siempre existe un espacio libre en la unión de los rieles. Este espacio es necesario porque el metal con que se construyen se dilata con el calor. Por eso las vías necesitan ese espacio, para no curvarse con temperaturas altas. ¿Cuánto espacio se debe dejar? ¿Cómo se sabe?*

*Estudios de ingeniería han obtenido la relación entre las distintas temperaturas y el alargamiento de los rieles, como muestra la tabla siguiente:*

| Temperatura ( ° C ) | Dilatación ( mm) |
|---|---|
| –12 | –1,4 |
| 8 | 1 |
| 25 | 3 |
| 50 | 6 |
| 75 | 9 |

*Si graficamos la tabla, nos queda:*




*Por lo tanto, sabemos que el punto* ( 0 , 0 ) *pertenece a la recta, entonces en la forma general de la función* $f(x) = y = m.x + b$ , $f(0) = m.0 + b = 0$. *La ordenada al origen* $b = 0$. *Luego tomo otro cualquier punto que pertenece a la recta, por ejemplo,* ( 8 , 1 ), *por lo que satisface la forma general, y quedaría*

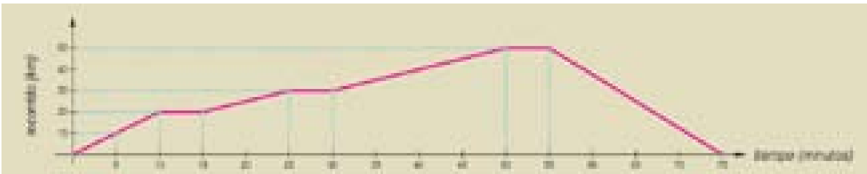
$F ( 8 ) = m.8 + 0 = 1$, *entonces la pendiente* $m = \frac{1}{8}$ . *La expresión alge-*

*braica de la función que modeliza el problema es* $y = \frac{1}{8}.x$ *, donde x representa la temperatura y la variable dependiente "y" representa la dilatación de los rieles.*

# ACTIVIDAD

## FUNCION LINEAL

1) Dada la siguiente gráfica que representa el movimiento de un tren:



El tren sale de la estación y va ganando velocidad. En su recorrido para en varias estaciones para recoger viajeros. Después de hacer su trayecto, el tren regresa a las cocheras sin hacer parada alguna.

a) ¿En cuántas estaciones se detiene para recoger viajeros?

b) ¿Cuánto tarda de una estación a otra?

c) ¿Qué distancia hay entre la primera y la última estación?

d) Indicar los intervalos de crecimiento, decrecimiento o constantes.

e) ¿Cuánto tarda en llegar a las cocheras, después de dejar a los pasajeros en la última estación?

2) En el año 1896 un científico sueco fue el primero en hablar del "efecto invernadero", como resultado de las emisiones de dióxido de carbono en el aire. La quema de combustibles fósiles produce 5,4 millones de toneladas de carbono al año, aproximadamente. Estas emisiones son absorbidas por la atmósfera y por los océanos. En la tabla siguiente, se muestra el aumento de la temperatura global que se pronostica para la tierra, considerada a partir de 1980 en ° Celsius.

| Año | Aumento de Temperatura ( °C) |
|---|---|
| 1980 | 0 |
| 2000 | 0,42 |
| 2020 | 0,84 |
| 2040 | 1,26 |
| 2060 | 1,68 |
| 2080 | 2,10 |

A partir de esta información:

a) Representar gráficamente los datos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos.

b) Determinar la expresión algebraica (función lineal) que modeliza estos datos.

c) Realizar el gráfico de la función lineal obtenida.

d) Interpretar la pendiente y la ordenada al origen en el contexto del problema.

e) Predecir la temperatura estimada para los años 2014, 2030 y 2110.

3) La compañía eléctrica que suministra electricidad a las residencias familiares de un barrio, fija un costo bimestral de \$ 15,80 por residencia, si el consumo de energía no supera los 40 kWh. Si el consumo de energía supera esa cantidad, el costo de energía suministrada puede representarse por la siguiente función lineal: $C(x) = 9{,}60 + (x - 40)0{,}093$, donde x representa los kWh consumidos.

a) Escribir el dominio de la función en el contexto de este problema.

b) ¿Cuál es la pendiente y ordenada al origen de esta función lineal?

c) Si una residencia abonó \$318, ¿cuál fue el consumo de energía?

4) Escribir la función lineal cuya representación gráfica pase por el punto (3,0) y forme con el eje de abscisas un ángulo de 60°.

5) Hallar el valor de "k" en las siguientes funciones lineales de manera que cada recta pase por el punto indicado:

a) $4x + 3y - k = 0$ A = (1,-2) b) $-kx + \frac{y}{2} - 1 = 0$ B = (3,0)

6) Representar gráficamente las siguientes funciones lineales e indicar dominio, imagen, intervalos de crecimiento o decrecimiento:

a) $y = -\frac{3}{4}x$ b) $y = 1{,}5x - 2$ c) $y = \frac{1}{2}x + 3$

d) $x - 2y = -4$ e) $y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}$ f) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

7) Graficar y determinar la expresión algebraica de las funciones lineales que:

a) Tiene pendiente 2 y ordenada al origen 1

b) Tiene pendiente –2 y f (0)=3.

c) Corta al eje de abscisas en 4 y al eje de ordenadas en 2

d) Pasa por los puntos (0,0) y (1, 1)

8) Graficar las siguientes funciones lineales en un mismo sistema de ejes cartesianos:

a) $\begin{cases} y = \frac{3}{2}.x + 2 \\ y = \frac{3}{2}.x \\ y = \frac{3}{2}.x - 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}.x + 1 \\ y = -\frac{2}{3}.x \\ y = -\frac{2}{3}.x - 1 \end{cases}$

Como seguramente habrá observado, las funciones lineales de cada inciso son paralelas.

Comparándolas entre grupos vemos que son perpendiculares.
Por lo tanto, podemos concluir que:

Como seguramente habrá observado, las funciones lineales de cada inciso son paralelas.

Comparándolas entre grupos vemos que son perpendiculares.
Por lo tanto, podemos concluir que:

**Si dos rectas son paralelas, sus pendientes son iguales.**
**Si dos rectas son perpendiculares, sus pendientes son inversas y opuestas.**

9) Escribir la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{1}{3}x + 1$ y que pase por el punto $(-1 , 2)$.

10) Escribir la ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x - 3$ y que pase por el punto $(-2 , -1)$.

11) Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1 , 5)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-2 , 3)$ y $(0, -1)$. Graficar ambas rectas para verificar.

12) Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2 , -1)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-1 , 4)$ y $(3, 1)$. Graficar.

13) Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(0, -1)$. Graficar.

14) Escribir la ecuación de la recta cuya pendiente es $\frac{5}{4}$ y pasa por el punto $(2, 4)$. Graficar.

15) Escribir la ecuación de la recta cuya pendiente es $-\frac{3}{7}$ y pasa por el punto $(4, 0)$. Graficar.

16) Escribir la ecuación de la recta cuya pendiente es -2 y pasa por el punto $(1,5)$. Graficar.

17) Escribir la ecuación de la recta cuya pendiente es $-5$ y corta al eje de ordenadas es $-2$. Graficar.

18) Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, -2)$ y $(\frac{8}{3},-1)$. Graficar.

19) Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-3 , 1)$ y es perpendicular a la recta definida por : $3x - 4y + 11 = 0$. Graficar.

20) Una represa, cuya capacidad es de 1150 millones de litros, pierde desde el primer día 12 millones de litros diarios.

a) Escribir la fórmula de la función que describe la cantidad de agua que permanece en la represa cada día. Graficar

b) ¿En cuánto tiempo se vacía la represa?

c) ¿En qué momento tendrá 70 millones de litros?

21) Se sabe que la demanda de entradas para un espectáculo A, cuando la función es gratis es de 60 entradas, y cuando el precio es de $ 1,80 no se vende ninguna. ¿Cuál es la ecuación de la demanda en función del precio si tiene un comportamiento lineal?

22) Hace cinco años, había 500 embarcaciones náuticas en una guardería. Como consecuencia de la buena gestión de la comisión directiva la cantidad ascendió a 4000. Suponiendo que el crecimiento se produce en forma lineal:

a) Expresar mediante una fórmula la cantidad de embarcaciones en función del tiempo.

b) Indicar aproximadamente cuándo llegará a 10000 embarcaciones.

c) Realizar un gráfico cartesiano de la situación.

23) Una empresa que fabrica clavos alquila un pequeño galpón. Aunque no haya producción debe pagar el alquiler de ese local y abonarles el sueldo a dos operarios, lo que implica un gasto fijo mensual de $ 3000. Si hay producción de clavos, tiene un gasto de materia prima. La función asociada al gasto mensual de la empresa se modelizó por la función:

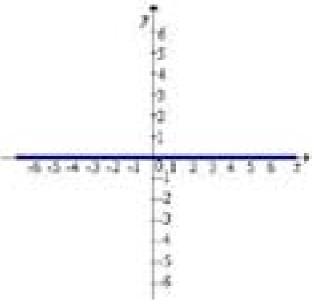
a) ¿Qué representa la x? ¿Qué representa la g(x)?

b) ¿Qué significa en este caso la ordenada al origen?

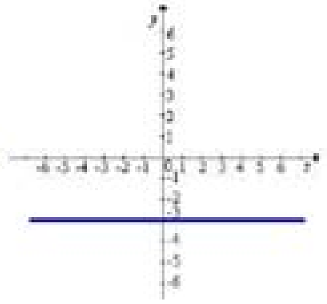
c) Graficar y a partir del grafico estimar g (200) y g (400)

24) Escribir la expresión algebraica de cada recta y en los casos que sea función la definición de la misma:

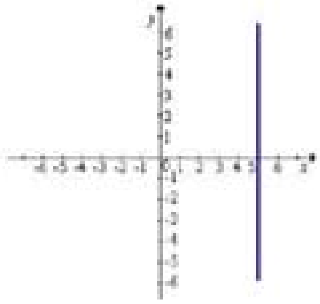
a)



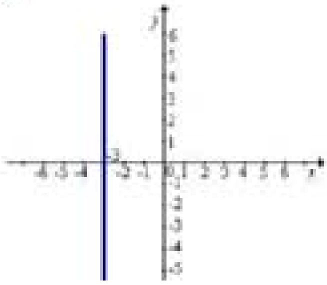
b)



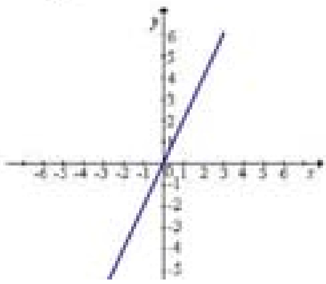
c)



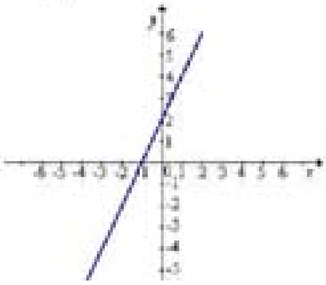
d)



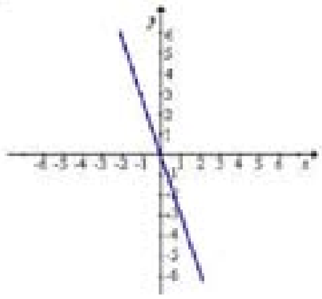
e)



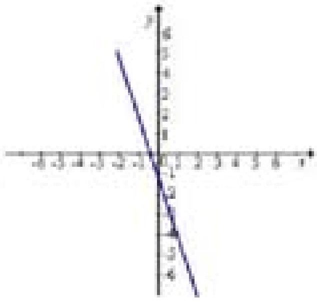
f)



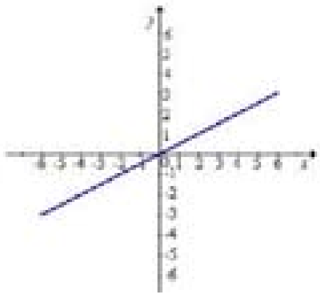
g)



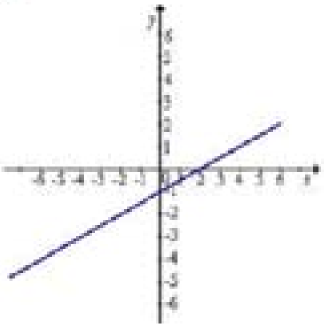
h)



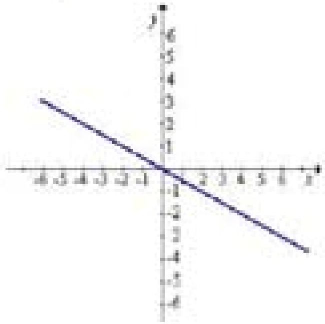
i)



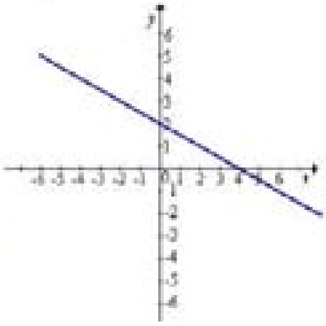
j)



k)



l)



SITUACIONES PROBLEMÁTICAS INICIALES

### Situacion Problemática

En el problema 1 de las Actividades correspondientes a Análisis de funciones, se planteó la situación de costos de una empresa de taxi, el cual, recordamos, cobra la bajada de bandera (costo fijo) a $ 10,10 y luego $1,10 por cada kilómetro recorrido. En ese momento, la tabla a completar quedaría de la manera siguiente:

| Distancia (km.) | Precio final ($) | (Distancia ; Precio final) ( x ; y ) |
|---|---|---|
| 0 | 0 .1,10 + 10,10 = 10,10 | ( 0 ; 10,10 ) |
| 5 | 5 . 1,10 + 10,10 = 15,60 | ( 5 ; 15,60 ) |
| 10 | 10 . 1,10 + 10,10 = 21,10 | ( 10 ; 21,10 ) |
| 20 | 20 . 1,10 + 10,10 = 32,10 | ( 20 ; 32,10 ) |
| 50 | 50 . 1,10 + 10,10 = 65,10 | ( 50 ; 65,10 ) |
| x | | |

La expresión simbólica de la función que modeliza la empresa de taxi es:

$$f:\Re^{+} \rightarrow \Re^{+} \,/\, f(x) = 1{,}10.x + 10{,}10$$

Ahora bien, la situación con una empresa de remises es bastante distinta porque cobra $ 6 por kilómetro recorrido, hasta una distancia de 50 km. Por lo tanto, una tabla de valores similares a la anterior, sería (Completar):

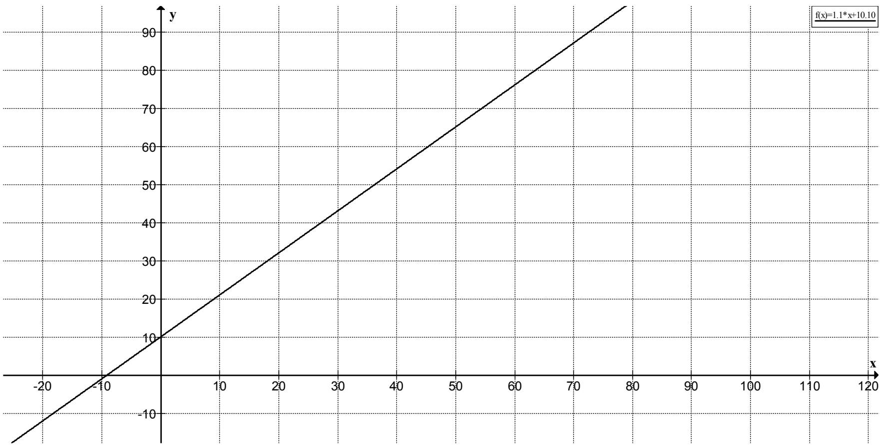
| Distancia (km.) | Precio final ($) | (Distancia ; Precio final) ( x ; y ) |
|---|---|---|
| 0 | | |
| 5 | | |
| 10 | | |
| 20 | | |
| 50 | | |

La expresión simbólica de la función que modeliza la empresa de remises es:

(Completar)

.........................................................................................................................................

Por lo tanto, el gráfico de ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos es (Completar)




Se observa, si se ha realizado el gráfico de la otra función, claramente, si una persona piensa viajar más de ..................... km, conviene viajar en la empresa de ......................

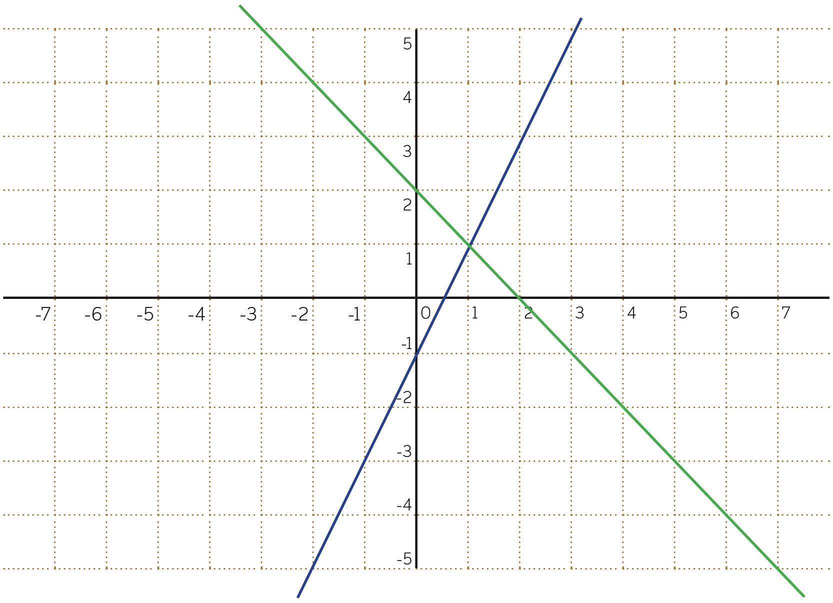
Por lo tanto, el punto de intersección entre el gráfico de ambas funciones, que representan dos situaciones problemáticas distintas, se utiliza en este caso para resolver o decidir conclusiones.

## SISTEMAS DE FUNCIONES LINEALES

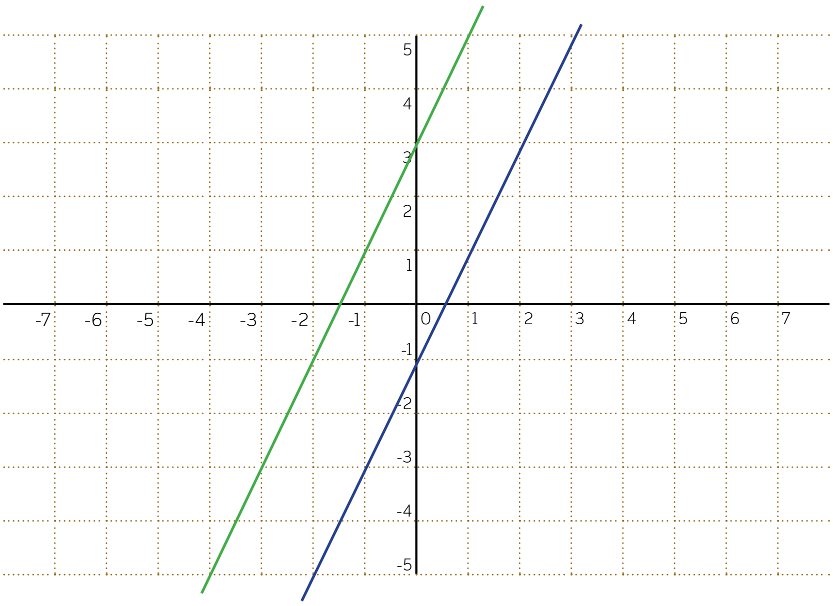
*Se conoce como Sistemas de Funciones Lineales el formado por dos funciones lineales, donde el punto de intersección entre las dos funciones, verifica que pertenece a ambas funciones simultáneamente.*

*Como el gráfico de dos funciones lineales son rectas, pueden aparecer 3 casos posibles:*

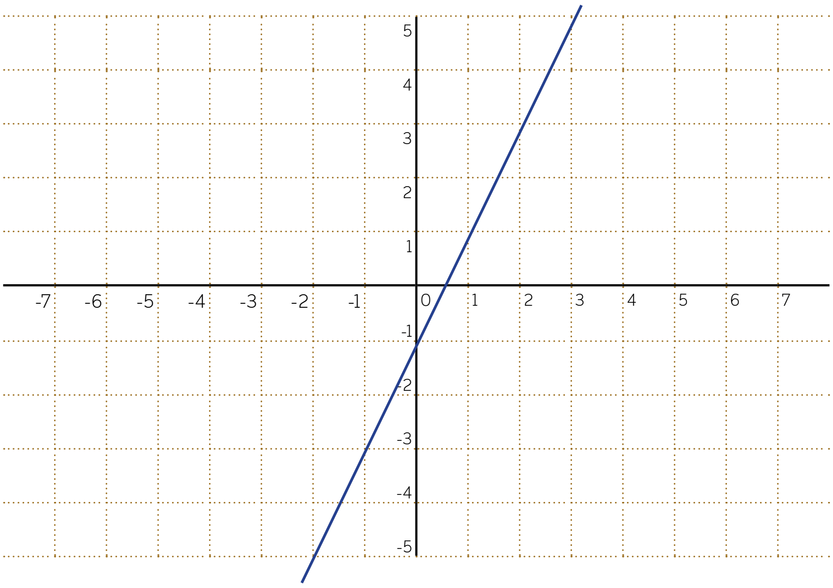
*1) Las rectas se cortan en un punto. El sistema se llama* **Compatible Determinado.**




*2) Las rectas son paralelas. El sistema se llama* **Incompatible** *porque no tiene solución.*



*3) Las rectas coinciden. Hay infinitas soluciones. El sistema se llama*
**Compatible** *(porque tiene solución)*
**Indeterminado** *(porque son infinitas).*




## RESOLUCIÓN ANALÍTICA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES

*Resolver un sistema de funciones lineales es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen ambas funciones lineales simultáneamente. Repasemos un método para resolverlo.*

### Método de Igualación

*Consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y como ésta debe ser equivalente entre ambas las podemos igualar, obteniendo de esta forma una ecuación con una sola incógnita.*

## EJEMPLOS RESUELTOS

<u>*EJEMPLO 1*</u>

*Resolver analíticamente el sistema:* $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

*De la primera ecuación despejamos la variable "y":*

$$\begin{aligned} &2.x - y = 1 \\ &2.x = 1 + y \\ &2.x - 1 = y \end{aligned}$$

*De la segunda ecuación despejamos la otra variable "x":*

$$\begin{aligned} &x + y = 2 \\ &y = 2 - x \end{aligned}$$

*Luego, como el punto buscado, si existe, es la intersección entre ambas rectas, resulta que la variable "y" obtenida de ambas ecuaciones son iguales, por lo tanto:*

$$\begin{aligned} &y = y \\ &2.x - 1 = 2 - x \\ &2.x + x = 2 + 1 \\ &3.x = 3 \\ &x = 1 \end{aligned}$$

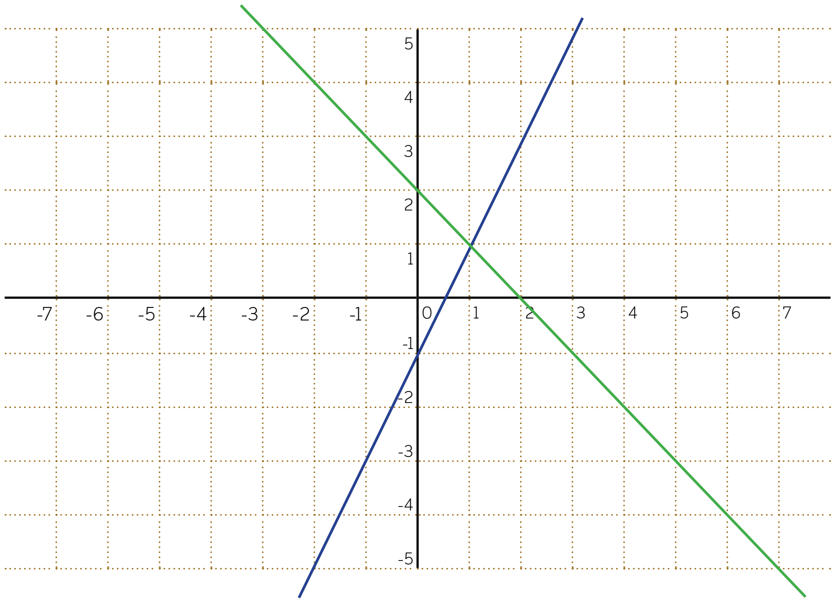
*Ese valor lo utilizamos para encontrar la otra variable "y", usando para ello cualquiera de las dos ecuaciones:*

$$\left.\begin{aligned} &y = 2 - x = 2 - 1 = 1 \\ &y = 2.x - 1 = 2.1 - 1 = 1 \end{aligned}\right\}$$

*Por lo tanto, la solución del sistema es el punto $(1,1)$.*

***<u>En este caso el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO</u>***

*Podemos verificarlo gráficamente:*




## *EJEMPLO 2*

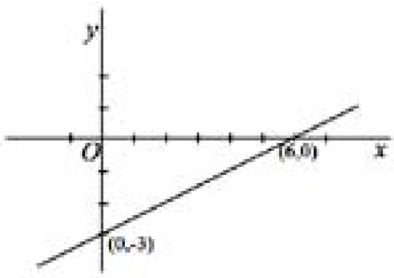
*Resolver el sistema* $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 2x = 12 + 4y \end{cases}$

*Como antes, despejamos "y" de la primera ecuación:*

$$-2y = -x + 6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 3 \qquad 1$$

*Despejamos "y" de la segunda ecuación:*

$$4y = 2x - 12 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 3 \qquad 2$$




*Se observa que ambas ecuaciones son iguales por lo que al graficarlas resultan en rectas coincidentes. El sistema tiene infinitas soluciones, formada por todos los puntos de la recta.*

*En este caso el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO*

## EJEMPLO 3

*Resolver el sistema:* $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ 2y = -4x + 2 \end{cases}$

*Despejando "y" de la primera ecuación:*

$$y = -2x - 3 \qquad (1)$$

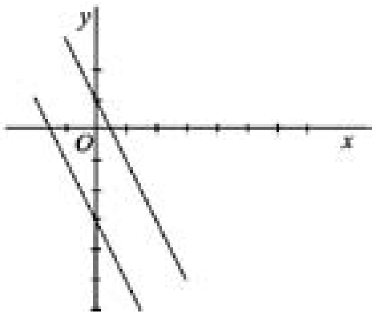
*Despejando "y" de la segunda ecuación:*

$$y = -2x + 1 \qquad (2)$$

*Resolviendo analíticamente mediante igualación como en el Ejemplo 1:*

$$-2x - 3 = -2x + 1$$
$$-3 = 1$$

*Se obtiene algo falso, lo que significa que el sistema NO tiene solución. Gráficamente se observa que son rectas paralelas.*

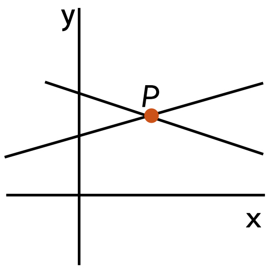



*En este caso el sistema es INCOMPATIBLE*

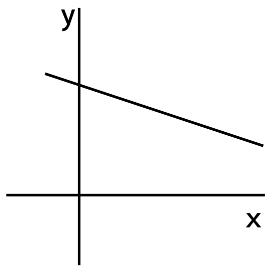
## SÍNTESIS – SISTEMAS DE 2 FUNCIONES LINEALES

*Sistemas de dos funciones lineales con dos incógnitas*

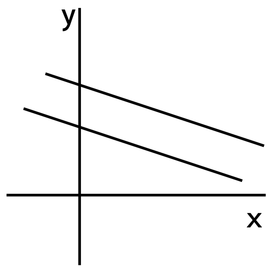
- ***Compatibles***
  - ***Determinados*** *(Única solución)*
  - ***Indeterminados*** *(Infinitas soluciones)*
- ***Incompatibles***




*Las rectas se cortan en un punto*




*Las rectas son coincidentes*




*Las rectas son paralelas*