Matemática

Unidad 3. Funciones

Prof. M. Ríos

CONTENIDOS

Interpretación de gráficas. Elementos característicos de las funciones: dominio, imagen, raíces. Crecimiento y decrecimiento. Extremos.

INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

SITUACIÓNES PROBLEMÁTICAS RESUELTAS

Situaciónes Problemáticas

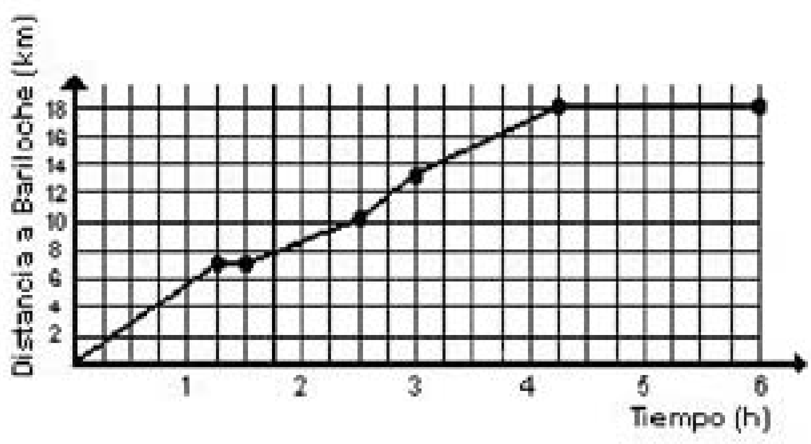
Se propone resolver los siguientes problemas para iniciar el desarrollo del tema.

1) Dos excursionistas proyectan una caminata hasta un refugio de montaña, que se encuentra a 18 km de la ciudad. Para orientarse, cuentan con un perfil del trayecto y un gráfico distancia –tiempo confeccionado por un grupo que realizó la caminata el mes anterior. Observando el gráfico, responder:

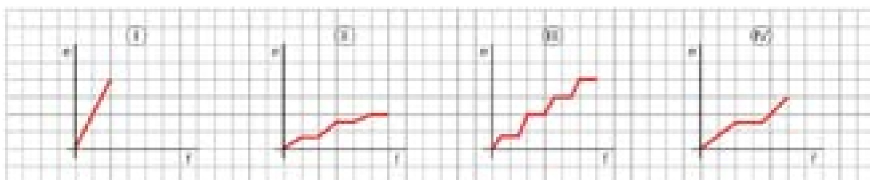
a) ¿Cuántos kilómetros recorrieron aproximadamente hasta llegar al primer descanso? ¿Cuánto tiempo se detuvieron?

b) ¿Cuántos kilómetros recorrieron desde ese lugar hasta alcanzar la primera cima y cuánto tiempo tardaron en subirla?

c) ¿Cuántos kilómetros hicieron en bajada? ¿Les llevó menos tiempo?



2) Asociar cada gráfica a las situaciones dadas. Fundamentar respuestas.



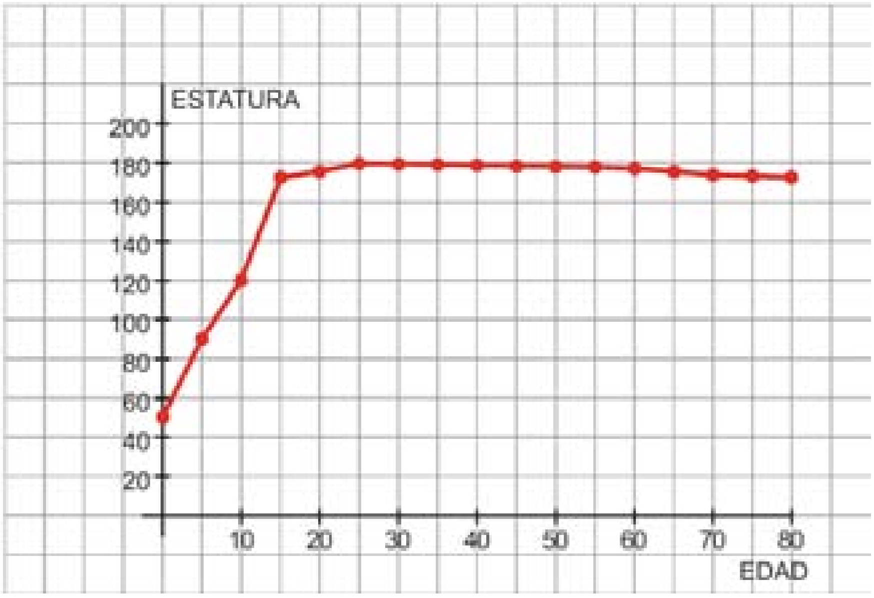
a) Recorrido realizado por un micro urbano.

b) Paseo en bicicleta parando una vez a beber agua.

c) Distancia recorrida por un auto de carrera en un tramo del circuito.

d) Un cartero repartiendo el correo.

3) La siguiente gráfica nuestra el crecimiento de una persona cada 5 años:



a) ¿Cuánto midió al nacer?

b) ¿A qué edad alcanza su altura máxima?

c) ¿En qué período crece más rápidamente?

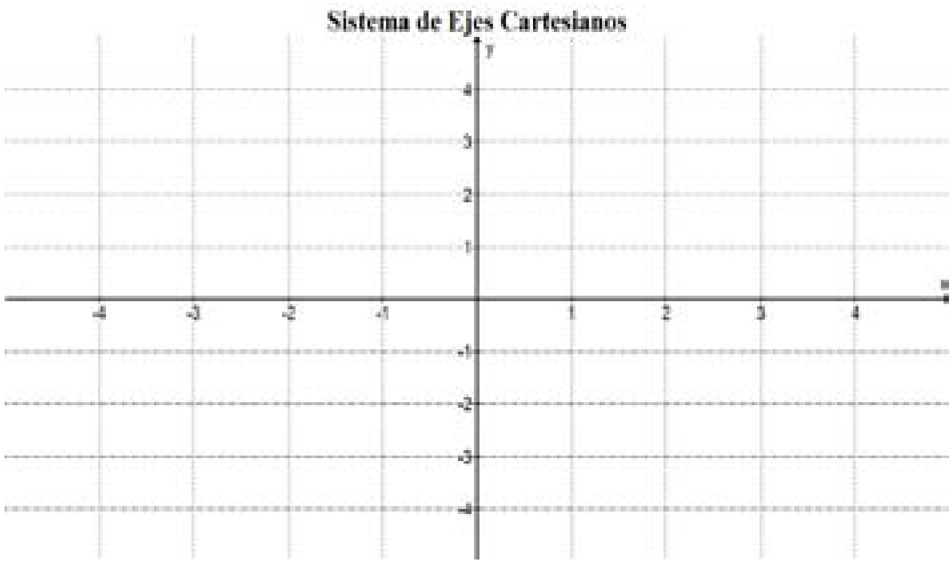
d) ¿Qué intervalo de números pueden tomar la edad y la altura?

e) ¿Por qué se pueden unir los puntos?

INTRODUCCIÓN A LAS FUNCIONES

En los problemas anteriores, las situaciones se representaron mediante gráficas realizadas en sistemas de ejes cartesianos.

Recordemos que un sistema de ejes cartesianos se utiliza cuando se requiere representar puntos en el plano, lo cual necesita de dos rectas perpendiculares, con un centro de referencia, llamado origen, el cual se identifica con el punto
(0 , 0).



Mirando los problemas iniciales, podemos deducir, también que:
Problema 1: La distancia depende del tiempo.
Problema 2: La estatura depende de la edad.

Por lo tanto, las situaciones relacionan dos magnitudes o variables, dependiendo de la naturaleza física de cada situación.

Convencionalmente, se grafican las variables independientes en el eje horizontal y las variables dependientes, en el eje vertical. Puede el lector, verificar esto último en las gráficas iniciales.

Estas dependencias entre las variables de situaciones físicas, químicas, mecánicas, económicas, pueden funcionar para resolver problemas, si verifican ciertas condiciones. Por ello, las *relaciones pueden ser funcionales o no. Las relaciones funcionales o simplemente FUNCIONES, se utilizan entonces para modelizar (ver Unidad 1) situaciones de todo tipo, por ejemplo:*

- *La distancia que llega un proyectil en función del tiempo empleado.*
  Variable independiente: tiempo. Variable dependiente: distancia.

- *El costo de un producto en función de la cantidad fabricada.*
  Variable independiente: cantidad fabricada. Variable dependiente: costo.

- *La altura que alcanza un lanzamiento en función de la velocidad inicial.*
  Variable independiente: velocidad inicial. Variable dependiente: altura.

Por lo tanto, para que una relación sea funcional no debe haber ambigüedad para determinar, por ejemplo, unívocamente los elementos de la variable independiente y conocer con certeza los valores que va tomando la variable dependiente. Concluimos que:

> ***Una relación entre dos variables es función si a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.***

EJEMPLOS RESUELTOS

EJEMPLO 1

Indicar si las siguientes relaciones son funciones:

a) *Temperatura de una persona tomada cada* 4 *horas.*
b) *Relación de cada número entero con su triple.*
c) *Temperaturas máximas y mínimas de los pacientes de un hospital.*

RESPUESTAS

a) *Es función ya que cada cuatro horas tendrá una única temperatura.*
b) *Es función ya que cada número entero tiene un único triple.*
c) *No es función ya que un paciente puede tener dos valores distintos de temperaturas máxima y mínima.*

EJEMPLO 2

Identificar en los siguientes ejemplos la variable independiente y la dependiente.

a) Gasto de nafta y velocidad de un automóvil.
b) Área de un cuadrado y longitud de sus lados.
c) Número de páginas de un libro y su grosor.

RESPUESTAS

a) Variable independiente: velocidad.
Variable dependiente: gasto de nafta.
b) Variable independiente: longitud del lado.
Variable dependiente: área del cuadrado.
c) Variable independiente: número de páginas.
Variable dependiente: grosor.

Ahora bien, tomando los ejemplos anteriores, en cada uno, hay valores de las variables independientes que no podrían existir. Por ejemplo, en el caso de la velocidad del automóvil, la variable independiente, no puede ser negativo, al igual en este caso que la variable dependiente, el gasto de nafta. Se denomina Dominio al conjunto numérico que puede tomar en el contexto del problema. El Dominio es un subconjunto de los números reales, generalmente cuando se modeliza mediante funciones reales.

La imagen corresponde a los valores que toma la variable dependiente.

TERMINOLOGÍA UTILIZADA

EJE DE ABSCISAS → *Es el eje horizontal, que representa a la variable independiente o bien, eje x.*

EJE DE ORDENADAS	→	*Es el eje vertical, que representa a la variable dependiente o bien, eje y.*

El dominio de una función f es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente. Se lo simboliza Dom (f).

La imagen de una función f es el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente. Se lo simboliza Im (f).

Las funciones pueden ser representadas mediante gráficas, como han sido los problemas iniciales.

Para obtener la gráfica de una función se puede partir de una tabla de valores, representando los puntos del plano (x,y), donde la valores de "x" corresponden a la variable independiente y los valores de "y" corresponden a la variable dependiente.

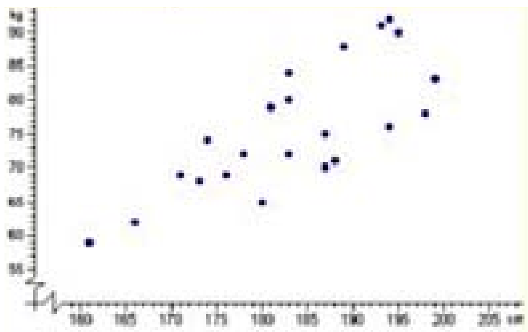
Los puntos indicados se unirán si la variable independiente puede tomar cualquier valor real en el intervalo estudiado. La recta o curva resultante es la gráfica de la función.

RELACIONES NO FUNCIONALES

EJEMPLOS RESUELTOS

EJEMPLO 1

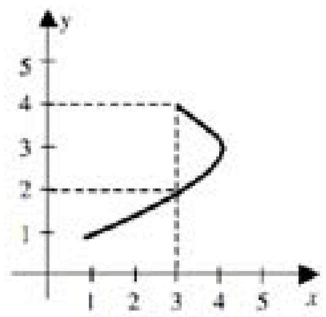
El peso de una persona, ¿es función de su altura? Se ha consultado mediante una encuesta a personas y se obtuvo este gráfico. La relación, ¿es función?



No es una relación funcional, dada la altura de una persona no se puede determinar su peso exactamente. Hay una relación estadística ya que dada una altura determinada se puede esperar que el peso esté en un cierto intervalo.

EJEMPLO 2

La siguiente gráfica, ¿corresponde a una función?

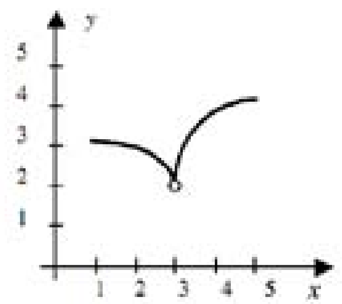


El gráfico no corresponde a una función ya que hay elementos del dominio que tienen más de una imagen.

Por ejemplo:
$f(3) = 2$ y $f(3) = 4$

EJEMPLO 3

La siguiente gráfica, ¿corresponde a una función?



Como no se define el dominio de la relación, analicemos dos posibilidades:

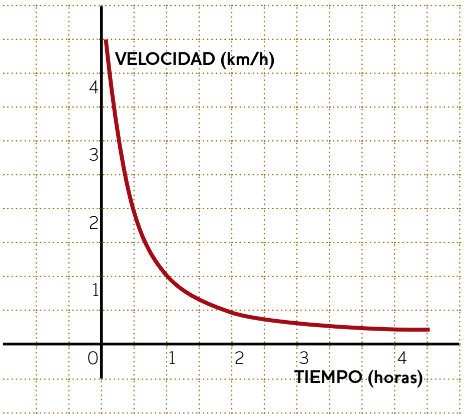
a) Si el f = $[1;5]$, entonces el elemento 3 no tiene imagen y no cumple con una condición para ser función, por lo que la relación con ese dominio NO es función.

b) Si el Domf $f = [1;5] - \{3\}$, el elemento 3 no forma parte del dominio, por lo tanto, con el dominio así definido, la relación SI es función.

Esto significa, que hay que analizar con detalle y observar con cuidado, las definiciones de las funciones, sobre todo el dominio, que indica el campo de desarrollo de ese modelo matemático.

ACTIVIDAD

1) La velocidad de un móvil en función del tiempo que recorre 1 Km. se representa por la gráfica siguiente:

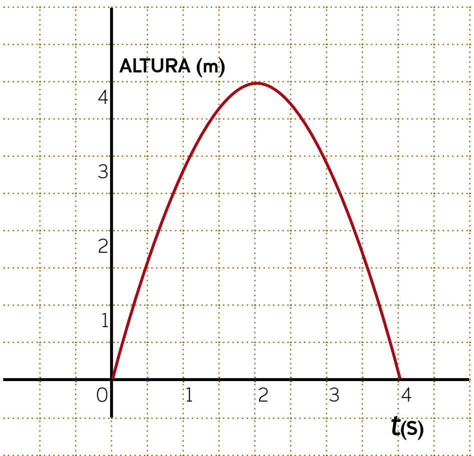


a) ¿Cuál es la velocidad en t = 1 hora?

b) Al aumentar el tiempo, ¿a qué velocidad tiende el móvil?

c) ¿Es una función creciente o decreciente?

2) La altura que alcanza una pelota arrojada hacia arriba en función del tiempo se representa mediante la gráfica siguiente:



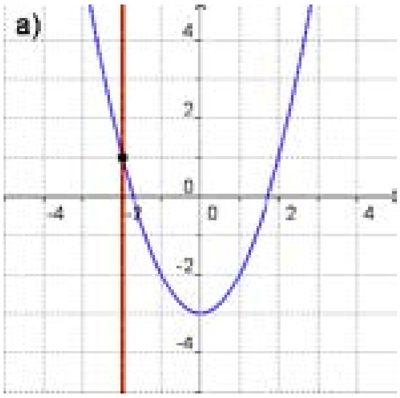
a) ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?

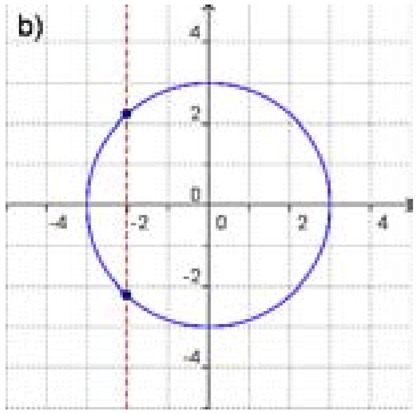
b) ¿Cuál es la altura máxima y en qué tiempo ocurre?

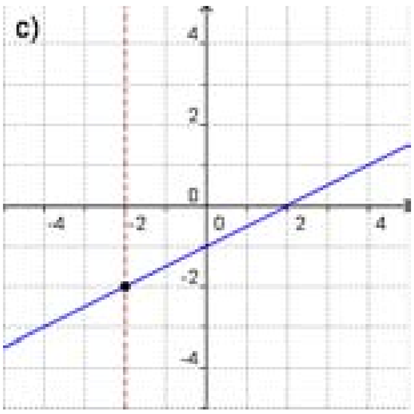
c) ¿En qué intervalo de tiempo la función crece y en cuál decrece?

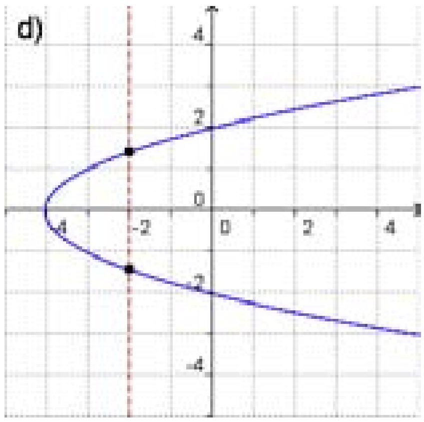
d) ¿Cuál es el dominio y la imagen de la función representada en el gráfico?

3) Analizar si las siguientes gráficas corresponden a funciones y en ese caso, escribir el dominio y la imagen:



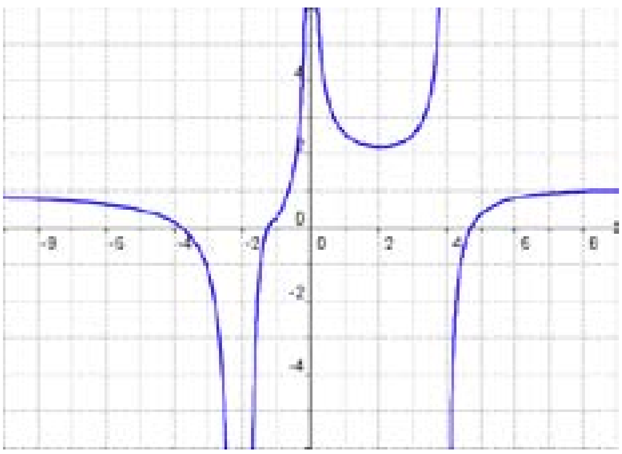




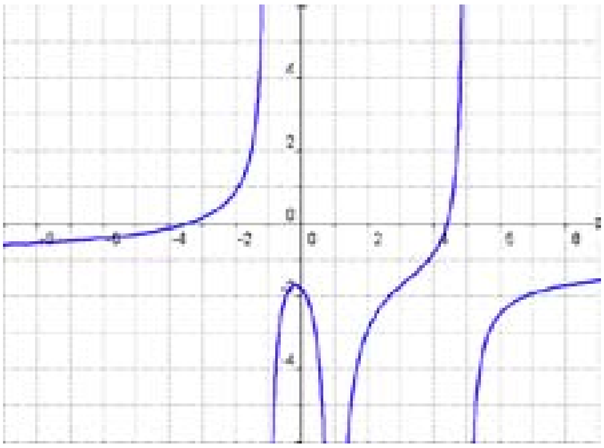


4) Escribir el dominio de las siguientes funciones:

a)



b)



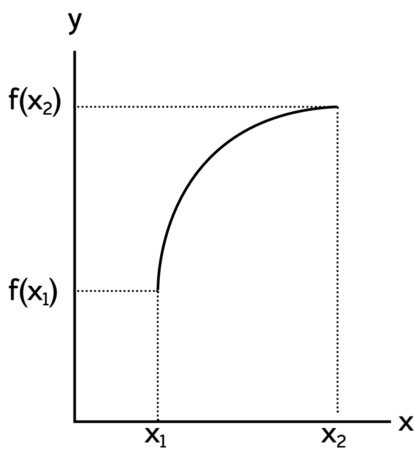
ANÁLISIS DE FUNCIONES

Además de la representación gráfica de una función, se utiliza una simbología específica algebraica, la cual se detalla a continuación.

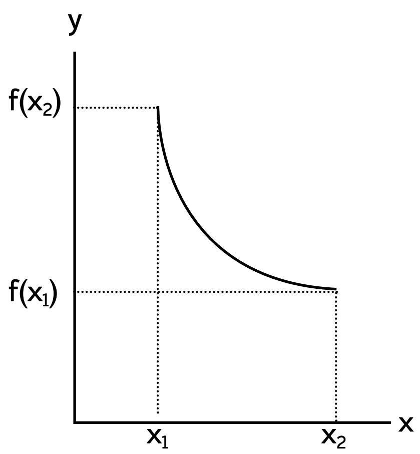
$f : Dominio \rightarrow Codominio \,/\, y = f(x)$ *, es decir, si el dominio es el conjunto de los números reales y el codominio son los números reales positivos, la función se expresaría simbólicamente como:* $f : \Re \rightarrow \Re^{+} \,/\, y = f(x)$*, donde la "x" es la variable independiente y la "y" es la variable dependiente, además de representar a las imágenes de cada valor que toma el dominio.*

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE LAS FUNCIONES

El crecimiento de una función se puede visualizar rápidamente con una inspección en el gráfico, pero se comprueba además, analíticamente que, a medida que la variable independiente aumenta, la variable dependiente también aumenta. Simbólicamente:



Una función es creciente en un intervalo, cuando dado dos puntos cualesquiera del mismo se verifica que
Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x1) < f(x_2)$



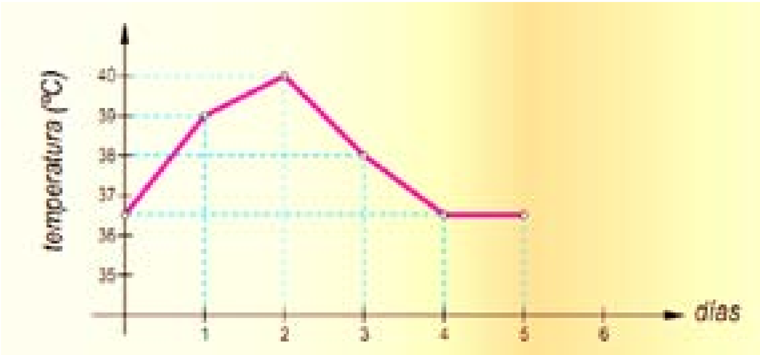
Una función es decreciente en un intervalo, cuando dado dos puntos cualesquiera del mismo se verifica que
Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Para avanzar en el estudio de los modelos funcionales, revisaremos el caso más básico, el de la función lineal.

EJEMPLOS RESUELTOS

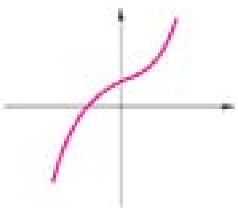
EJEMPLO 1

La gráfica siguiente muestra la evolución de la temperatura de un niño enfermo a lo largo de 5 días.

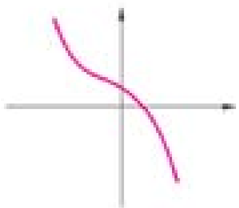


Observamos que el primer día la temperatura subió hasta llegar a los 39°. *El segundo día empeoró y la temperatura siguió subiendo hasta los* 40°. *Al tercer día empezó a mejorar y la temperatura descendió hasta los* 38°. *El cuarto día la temperatura siguió bajando hasta los* 36,5° *y el quinto día la temperatura se mantuvo en* 36,5°, *mejorando la situación del paciente. Por lo tanto, matemáticamente:*

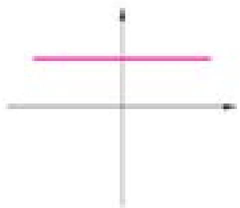
- *La función es creciente en el intervalo* (0,2) *de los valores de la variable independiente, es decir, los días.*
- *La función es decreciente en el intervalo* (2, 4).
- *La función es constante en el intervalo* (4,5).



función creciente



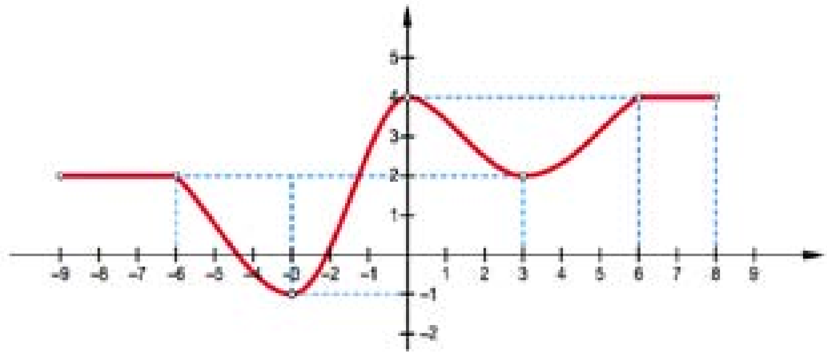
función decreciente



función constante

EJEMPLO 2

Dado el siguiente gráfico de una función, los intervalos de crecimiento,



decrecimiento, dominio e imagen son:

Creciente en $(-3,0) \cup (3,6)$

Decreciente en $(-6,3) \cup (0,3)$

Constante en $(-9,-6) \cup (6,8)$

Dominio: $[-9,8]$

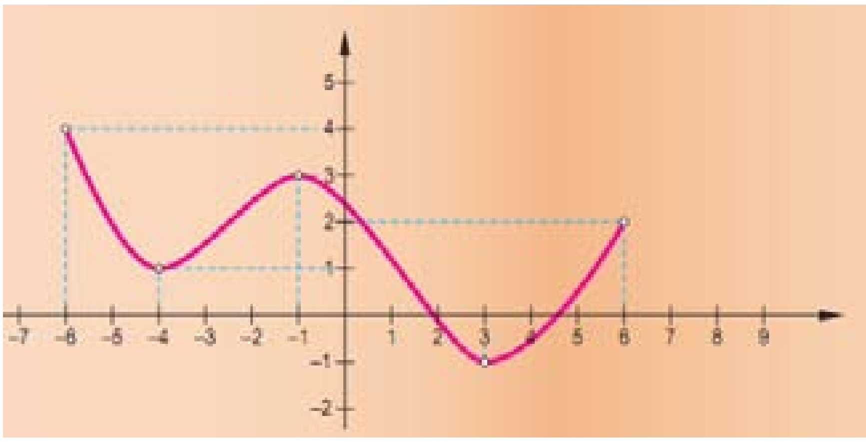
Imagen: $[-1,4]$

ACTIVIDAD

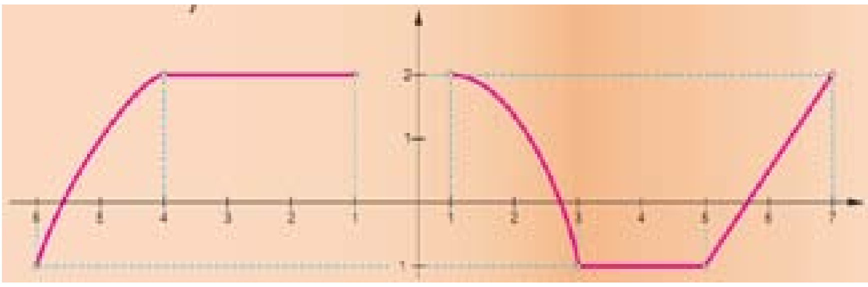
ANÁLISIS DE FUNCIONES

1) Dado los siguientes gráficos, escribir los intervalos de crecimiento, decrecimiento, dominio e imagen de las funciones representadas:

a)



b)



c)